

Lektion 4: Geometrie

Pythagoras, Flächen und Umfänge, Körper, Koordinatensystem

4.1 Der Satz des Pythagoras

Im **rechtwinkligen** Dreieck mit den Katheten a , b und der Hypotenuse c (der längsten Seite, dem rechten Winkel gegenüber):

$$a^2 + b^2 = c^2$$

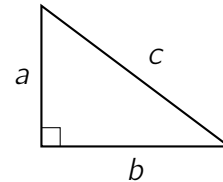
Umgestellt:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Auswendig – diese Tripel kommen immer wieder:

$$3|4|5 \quad 6|8|10 \quad 15|20|25$$

Jedes **Vielfache** eines solchen Tripels ist wieder eines.



Häufige Fehler

- $\times$ Kathete gesucht: $a = \sqrt{c^2 + b^2}$ $\checkmark$ Für eine Kathete wird **subtrahiert**: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.
- $\times$ $c = a + b$ $\checkmark$ Quadriert werden die Seiten, nicht addiert: $3 + 4 = 7$, aber $c = 5$.
- $\times$ $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ $\checkmark$ Für Summen gibt es kein Wurzelgesetz: $\sqrt{81 + 1600} = 41$, nicht 49.
- $\times$ Der Satz gilt in jedem Dreieck. $\checkmark$ Nur im **rechtwinkligen**.

Vorgerechnet

1. $a = 15, b = 20$: $c = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$
2. $b = 20, c = 29$: $a = \sqrt{841 - 400} = \sqrt{441} = 21$
3. $a = 12, c = 37$: $b = \sqrt{1369 - 144} = \sqrt{1225} = 35$
4. Rechteck $l = 9, b = 40$: $d = \sqrt{81 + 1600} = \sqrt{1681} = 41$

4.2 Flächen und Umfänge

Quadrat (Seite a) $A = a^2$ $U = 4a$, Diagonale $d = a\sqrt{2}$

Rechteck (l, b) $A = l \cdot b$ $U = 2(l + b)$, Diagonale $d = \sqrt{l^2 + b^2}$

Dreieck $A = \frac{g \cdot h}{2}$ h ist die Höhe **zur gewählten** Grundseite g

Kreis (Radius r) $A = r^2\pi$ $U = 2r\pi$, Durchmesser $d = 2r$

Rückwärts: $A = 121 \Rightarrow a = 11$ $U = 32 \Rightarrow a = 8$ $d = 26 \Rightarrow r = 13$

Häufige Fehler

- $\times$ Kreis mit $r = 9$: $U = 81\pi$ $\checkmark$ $U = 2r\pi = 18\pi$; 81π ist die **Fläche**.
- $\times$ Durchmesser $d = 30$, also $A = 900\pi$ $\checkmark$ Zuerst halbieren: $r = 15$, also $A = 225\pi$.
- $\times$ Dreieck: $A = \frac{g \cdot h}{2}$ mit irgendeiner Höhe $\checkmark$ h muss die Höhe **zu genau dieser** Grundseite sein.
- $\times$ Quadrat mit $U = 36$: $a = 36 : 2 = 18$ $\checkmark$ Ein Quadrat hat vier Seiten: $a = 36 : 4 = 9$.

Vorgerechnet

1. Kreis $r = 8$: $U = 2 \cdot 8\pi = 16\pi$, $A = 8^2\pi = 64\pi$
2. Kreis $d = 14$: $r = 7$, $A = 49\pi$, $U = 14\pi$
3. Dreieck $g = 12$, $h = 7$: $A = \frac{12 \cdot 7}{2} = 42$
4. Quadrat $a = 7$: $A = 49$, $U = 28$, $d = 7\sqrt{2} \approx 9.90$



4.3 Körper

Quader (a, b, c) $V = a \cdot b \cdot c$ $O = 2(ab + ac + bc)$

Würfel (Kante a) $V = a^3$ $O = 6a^2$

Zylinder (r, h) $V = r^2 \pi h$ Mantel $M = 2r \pi h$

Volumen Produkt aus **drei** Längen – Einheit cm^3

Oberfläche Summe **aller** Seitenflächen – Einheit cm^2

Häufige Fehler

- $\times O = ab + ac + bc$ $\checkmark$ Jede Fläche kommt zweimal vor: $O = 2(ab + ac + bc)$.
- $\times O = 2(a + b + c)$ $\checkmark$ Das ist eine Länge, keine Fläche – die Kanten werden multipliziert.
- $\times V = a \cdot b \cdot c$ ist die Oberfläche. $\checkmark$ Das ist das Volumen; Volumen und Oberfläche nie verwechseln.
- $\times$ Würfel mit $a = 3$: $O = 6 \cdot 3 = 18$ $\checkmark$ Sechs **Quadrate**: $O = 6 \cdot 3^2 = 54$.

Vorgerechnet

1. Quader $a = 8, b = 3, c = 2$: $V = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48$
2. derselbe Quader: $O = 2(24 + 16 + 6) = 2 \cdot 46 = 92$
3. Würfel $a = 5$: $V = 125$, $O = 6 \cdot 25 = 150$
4. Zylinder $r = 4, h = 7$: $V = 16\pi \cdot 7 = 112\pi$, $M = 2 \cdot 4\pi \cdot 7 = 56\pi$



4.4 Im Koordinatensystem

Für zwei Punkte $A(x_1, y_1)$ und $B(x_2, y_2)$ mit $\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta y = y_2 - y_1$:

$$\text{Länge der Strecke} \quad \overline{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad \text{Steigung} \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Beides ist dasselbe Steigungsdreieck: die Strecke ist seine **Hypotenuse** (Pythagoras), die Steigung das **Verhältnis** der beiden Katheten.

Häufige Fehler

- $\times m = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ $\checkmark$ Im Zähler steht Δy , im Nenner Δx .
- $\times \overline{AB} = \Delta x + \Delta y$ $\checkmark$ Erst quadrieren, dann Wurzel: $6 + 4 = 10$, aber $\overline{AB} = \sqrt{52} \approx 7.2$.
- $\times \Delta x = x_1 - x_2$ und $\Delta y = y_2 - y_1$ $\checkmark$ In beiden Differenzen dieselbe Reihenfolge, sonst kippt das Vorzeichen.
- $\times \overline{AB} = \sqrt{-576 + 100}$ $\checkmark$ Quadrate sind nie negativ: $\sqrt{576 + 100} = 26$.

Vorgerechnet

1. $A(-4, -3), B(20, 7): \quad \Delta x = 24, \quad \Delta y = 10$
2. $\overline{AB} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \qquad m = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$
3. $A(-2, 3), B(4, -1): \quad \Delta x = 6, \quad \Delta y = -4$
4. $\overline{AB} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \approx 7.21 \qquad m = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$



Übungsaufgaben zu Lektion 4

Bei jeder Aufgabe ist genau eine Antwort korrekt.

1. In einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b und Hypotenuse c sind $b = 16$ und $c = 34$ gegeben. Welcher Wert von a ist korrekt?
 - ☐ $a = \sqrt{1412}$
 - ☐ $a = 18$
 - ☐ $a = 30$
 - ☐ $a = 50$
2. Ein Rechteck hat die Länge $l = 45$ cm und die Breite $b = 28$ cm. Wie lang ist seine Diagonale?
 - ☐ 53 cm
 - ☐ 73 cm
 - ☐ 17 cm
 - ☐ 1260 cm
3. Ein Quader hat die Kanten $a = 5$ cm, $b = 4$ cm und $c = 3$ cm. Wie gross ist seine Oberfläche?
 - ☐ 24 cm^2
 - ☐ 47 cm^2
 - ☐ 60 cm^2
 - ☐ 94 cm^2
4. Ein Kreis hat den Radius $r = 6$ cm. Wie gross sind Umfang und Flächeninhalt?
 - ☐ $U = 6\pi \text{ cm}$ und $A = 12\pi \text{ cm}^2$
 - ☐ $U = 12\pi \text{ cm}$ und $A = 36\pi \text{ cm}^2$
 - ☐ $U = 36\pi \text{ cm}$ und $A = 12\pi \text{ cm}^2$
 - ☐ $U = 12\pi \text{ cm}$ und $A = 12\pi \text{ cm}^2$
5. Im Koordinatensystem sind die Punkte $A(6, -5)$ und $B(-6, 11)$ gegeben. Wie lang ist die Strecke $\overline{AB}$ und welche Steigung hat die Gerade durch A und B ?
 - ☐ $\overline{AB} = 28$ und $m = -\frac{4}{3}$
 - ☐ $\overline{AB} = 20$ und $m = -\frac{3}{4}$
 - ☐ $\overline{AB} = 20$ und $m = -\frac{4}{3}$
 - ☐ $\overline{AB} = 20$ und $m = \frac{4}{3}$

